

Маховер Михаил Сергеевич

учитель математики, заслуженный учитель Российской Федерации

Государственное общеобразовательное учреждение «Гимназия №11»

Василеостровского района, г. Санкт-Петербурга

Жувикина Ирина Алексеевна

начальник отдела поддержки инновационной деятельности

Санкт-Петербургское государственное казенное учреждение

«Дирекция наукограда Российской Федерации г. Петергофа»

г. Санкт-Петербург

УРОК ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ:

С6 – РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Предлагаются методы решения нескольких типов алгебраических уравнений с двумя неизвестными в целых числах. Методы проиллюстрированы решениями задач.

В вариантах ЕГЭ по математике - тренировочных и реальных – в качестве заданий С6 часто предлагаются к решению в натуральных (целых) числах алгебраические уравнения, содержащие более одной неизвестной величины. Прежде чем перейти к разбору конкретных типов заданий, заметим, что решение алгебраических уравнений в целых числах является одной из древнейших задач, которой занимаются математики. Этими задачами увлекались математики Древней Греции (Пифагор, Диофант), европейские математики XVII-XVIII веков (Ферма, Эйлер, Лагранж). Сейчас теория решения алгебраических уравнений в целых числах является составной частью сложнейшего и увлекательного раздела современной математики – теории чисел.

***Урок №1. Уравнения в целых числах с двумя неизвестными,
приводимые к простейшим дробно - рациональным***

Рассмотрим тип простейших алгебраических уравнений с двумя неизвестными в целых числах, приводимых к дробно-рациональному виду. В теории решения уравнений в целых числах содержательным и сложным является не только вопрос об определении самих решений уравнения, а уже вопрос об их количестве. А именно, установление того, является ли множество решений рассматриваемого уравнения конечным или бесконечным и насколько реально сведение решения уравнения к перебору конечного и не слишком большого количества возможных вариантов.

В качестве заданий С6 реально встречаются, в частности, следующие[1]: решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \quad x \geq y \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}, \quad x > y \quad (3)$$

Опишем в общем виде стандартную процедуру решения уравнений (1)-(3). Пусть нам надо решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \quad x \geq y, \text{ где } a \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Приступая к решению этой задачи, как, и вообще во многих задачах, связанных с решением уравнений в натуральных (целых) числах, следует сразу же наметить путь борьбы с бесконечностью перебора количества возможных решений уравнения. Действительно, количество натуральных (целых) чисел бесконечно, а, значит, бесконечно и количество их пар. Ограничить перебор конечным, желательно не слишком большим количеством вариантов, - к этому следует стремиться при решении уравнения в натуральных (целых) числах.

Сделаем этот первый шаг в решении уравнения (4). Как же можно определить, является множество решений уравнения (4) конечным или бесконечным? Для этого перепишем его в виде

$$ax + ay = xy. \quad (5)$$

Это можно сделать, поскольку согласно условию $a \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$.

В левой части уравнения (5) стоит многочлен первой степени, а в правой – второй. (Степень многочлена, относительно более, чем одной переменной, определяется по максимальной суммарной степени неизвестных в слагаемых). Поэтому при достаточно больших значениях неизвестных правая часть будет заведомо больше левой, а, значит, и решений данного уравнения при очень больших значениях неизвестных быть не может. Иными словами, множество решений уравнения (4) ограничено сверху. Снизу оно ограничено нулем в силу требования условия задачи поиска решения уравнения (4) на множестве натуральных чисел. Таким образом, мы убедились в конечности множества пар натуральных чисел, которые обращают уравнение (4) в верное тождество.

Вторым шагом по пути решения уравнения в целых числах является поиск оптимальной процедуры перебора конечного множества пар целых чисел - потенциальных решений уравнения - для выделения тех из них, которые, действительно обращают уравнение в верное тождество.

Для этого необходимо найти в условии задачи факт, дающий возможность ограничить одну из искомых величин x или y каким-нибудь конкретным интервалом. На первом шаге решения мы убедились в том, что это в принципе возможно. Применительно к нашему уравнению (4) такая возможность ограничения перебора дается, на первый взгляд, безобидным (второстепенным, не очень может быть важным, по мнению неискующего в таких задачах школьника), условием $x \geq y$. Именно такая неожиданная принципиальная важность изучения условия $x \geq y$ и делает такие задачи плохо решаемыми неподготовленными экзаменуемыми. Покажем, как применить это условие к

нахождению искомого ограничения в данном случае на неизвестную величину y .

Используя условие того, что $x, y \in \mathbb{N}$, выпишем логическую цепочку неравенств, вытекающих из условия $x \geq y$:

$$x \geq y \Rightarrow 0 < \frac{y}{x} \leq 1 \Rightarrow \quad (6)$$

$$1 < \frac{y}{x} + 1 \leq 2. \quad (7)$$

Теперь обратимся к самому уравнению (4). Умножив обе его части на y , получим

$$\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{a}. \quad (8)$$

Теперь очевидно, что соотношения (7) и (8) совместно и определяют искомое двустороннее ограничение на переменную y , а именно

$$1 < \frac{y}{a} \leq 2 \Rightarrow a < y \leq 2a. \quad (9)$$

Определив интервал перебора значений неизвестной y , соответствующее каждому из них значение неизвестной x найдем, разрешив уравнение (5) относительно x

$$x = \frac{ay}{y-a}. \quad (10)$$

Окончание решения уравнения (4) трудности уже не составляет. Последовательно подставляя натуральные числа из промежутка $(a, 2a]$ (возможные значения неизвестной y) в выражение (10), надо оставить в качестве решений уравнения (4) те пары x и y , при которых величина x также как и y , принимает натуральные значения. Итак,

$$1) \quad y = a + 1 \Rightarrow x = \frac{a(a+1)}{1} \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = a(a+1), y = a+1) \text{- решение}$$

$$2) \quad y = a + 2 \Rightarrow x = \frac{a(a+2)}{2}$$

$$3) \quad y = a + 3 \Rightarrow x = \frac{a(a+3)}{3}$$

....

$$a-1) \quad y = 2a-1 \Rightarrow x = \frac{a(2a-1)}{a-1}$$

$$a) y = 2a \Rightarrow x = \frac{2a^2}{a} = 2a \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = 2a, y = 2a) - \text{решение.}$$

Таким образом, для решения уравнения (4) нам потребовалось перебрать всего a вариантов. Даже не зная конкретного значения параметра a , но формально реализовав описанную выше процедуру, можно сделать ряд содержательных выводов относительно решений уравнения (4). Очевидно, что при $a = 1$ вся процедура сводится к одной первой строке, и, соответственно, уравнение (4) имеет единственное решение $(x = 2, y = 2)$. При всех других значениях параметра a уравнение (4) имеет, как минимум, два решения, соответствующих первой и последней строке процедуры. Наличие и количество других решений целиком определяется делимостью натуральных чисел. Нетрудно понять, что при четных значениях параметра a все четные строки также могут давать решения уравнения (4), если параметр a делится на 3, то каждая третья строка процедуры может добавлять решение уравнению (4) и т.д. При каждом конкретном значении параметра a , который дается в условии задачи, окончательный результат получается совсем несложно. Проиллюстрируем описанный метод.

Задача 1. Решить в натуральных числах уравнение (1)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \quad x \geq y.$$

Решение. Так как согласно условию, $x \neq 0, y \neq 0$, то запишем уравнение (1) в виде $\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{8}$, принимая во внимание неравенство $0 < \frac{y}{x} \leq 1$, получим для неизвестной y оценку: $1 < \frac{y}{8} \leq 2$ или

$$8 < y \leq 16. \tag{11}$$

Выражая в исходном уравнении (1) x через y , найдем

$$x = \frac{8y}{y-8}. \tag{12}$$

Последовательно подставляем в (12) вместо y целые числа, удовлетворяющие неравенству (11), найдем все натуральные решения уравнения (1).

$$y = 9 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 9}{1} = 72 \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = 72, y = 1)$$

$$y = 10 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40 \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = 40, y = 10)$$

$$y = 11 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 11}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$y = 12 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 12}{4} = 24 \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = 24, y = 12)$$

$$y = 13 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 13}{5} \notin \mathbb{N}$$

$$y = 14 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 14}{6} \notin \mathbb{N}$$

$$y = 15 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 15}{7} \notin \mathbb{N}$$

$$y = 16 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 16}{8} = 16 \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = 16, y = 16)$$

Ответ: (16,16);(24,12);(40,10);(72,9).

Приведем ответы к уравнениям (2) и (3). В качестве указания к самостоятельному решению, отметим, что при решении уравнения (2) следует в соответствии с описанной выше процедурой последовательно разобрать два случая - $x \geq y$ и $x \leq y$. Ответ к уравнению (2): (12,4);(6,6);(4,12). Ответ к уравнению (3):(90,10);(36,2).

Урок №2. Уравнения в целых числах с двумя неизвестными, приводимые к квадратным уравнениям

Рассмотрим еще один тип уравнений в целых числах, которые встречаются в качестве задания С6 в реальных вариантах ЕГЭ. Особенность этих уравнений является то, что в процессе поиска их целых решений приходится иметь дело с исследованием некоторого довольно сложного квадратного уравнения относительно двух неизвестных. Примеры таких уравнений можно найти в [1,2,3]. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 = y^2 + 6y + 21, \quad (13)$$

$$x + y = x^2 - xy + y^2, \quad (14)$$

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0, \quad (15)$$

$$x^2 = 2(xy - y^2 - y). \quad (16)$$

Давайте сначала разберемся, что же позволило нам объединить эти четыре уравнения в одну группу и попытаемся поискать общий подход к их исследованию. Во-первых, заметим, что все члены этих уравнений имеют суммарную степень по двум неизвестным не выше второй. Во-вторых, если одну из переменных, например x , рассматривать, как параметр, то по неизвестной y каждое из уравнений (13)-(16) окажется обычным квадратным уравнением. И наоборот, если в качестве параметра рассматривать неизвестную y , то все эти уравнения оказываются квадратными относительно x . На этом свойстве уравнений (13)-(16) и будет основан общий подход к поиску их целочисленных решений.

Выберем одну из неизвестных, пусть для определенности это будет неизвестная x . Относительно этой неизвестной каждое из этих уравнений может быть представлено как квадратное уравнение

$$ax^2 + f_1(y)x + f_2(y) = 0, \quad (17)$$

где a - положительное число, а f_1 и f_2 как функции переменной y имеют вид

$$f_1(y) = c_1y + d_1, \quad (18)$$

$$f_2(y) = b_2y^2 + c_2y + d_2, \quad (19)$$

причем числа b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 могут быть любыми вещественными, в том числе и равными нулю. Рассмотрим уравнение (17). Чтобы ставить вопрос о поиске его целых решений, необходимо сначала убедиться в наличии у него вещественных решений. Наличие или отсутствие вещественных решений квадратного уравнения, как известно, определяется положительностью или отрицательностью его дискриминанта. Дискриминант уравнения (17) равен

$$D(y) = [f_1(y)]^2 - 4a \cdot f_2(y) \quad (20)$$

и, очевидно, является функцией переменной y . Подставляя выражения (18) и (19) в формулу (20) и приведя подобные члены, мы получим окончательное выражение для дискриминанта уравнения (17)

$$D(y) = -(4ab_2 - c_1^2)y^2 + 2(c_1d_1 - 2ac_2)y - (4ad_2 - d_1^2). \quad (21)$$

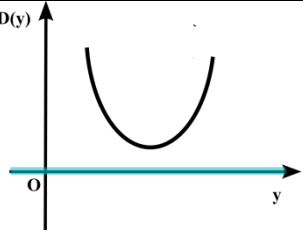
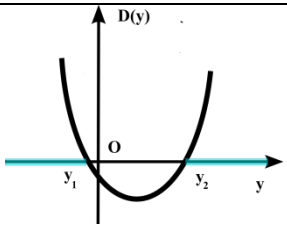
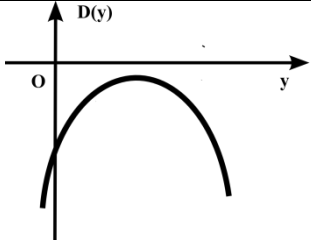
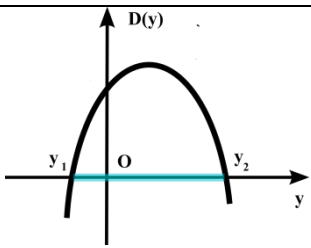
Полученное выражение относительно переменной y представляет собой квадратный трехчлен. График функции $D(y)$ является параболой, расположение которой на координатной плоскости определяется величинами коэффициентов в выражении (21). Наличие вещественных корней уравнения (17) относительно неизвестной x , возможно лишь в тех областях значений параметров, где парабола $D(y)$ расположена выше оси абсцисс – дискриминант является положительным числом.

Для того чтобы разобраться с расположением параболы на координатной плоскости нам необходимо ввести в рассмотрение еще и дискриминант квадратного трехчлена $D(y)$ – дискриминант дискриминанта исходного уравнения. Обозначим его $D(D(y))$. Из соотношения (21) тогда имеем

$$D(D(y)) = 4(c_1d_1 - 2ac_2)^2 - 4(ab_2 - c_1^2)(4ad_2 - d_1^2). \quad (22)$$

Сведем данные, связанные с расположением параболы $D(y)$ на координатной плоскости в таблицу.

Таблица 1

	Знак величины $(4ab_2 - c_1^2)$	Знак величины $D(D(y))$	График функции $D(y)$	Промежуток, на котором $D(y) > 0$
1	< 0	< 0		$y \in]-\infty, \infty[$
2	< 0	> 0		$y \in]-\infty, y_1[\cup]y_2, \infty[$
3	> 0	< 0		$y \in \emptyset$
4	> 0	> 0		$y \in [y_1, y_2]$

Для y_1 и y_2 имеем обычное выражение для корней квадратного уравнения (21)

$$y_{1,2} = \frac{(c_1 d_1 - 2ac_2) \mp \sqrt{D(D(y))/4}}{(4ab_2 - c_1^2)}. \quad (22)$$

Рассмотрим последовательно строки таблицы. При соотношении параметров задачи, приведенным в первой строке, график функции $D(y)$ расположен выше оси абсцисс при всех значениях переменной y . Это значит, что вещественные решения уравнения (17) могут существовать при любом вещественном y . Таким образом, в этом случае нам не удалось свести решение задачи к перебору

конечного количества значений y . Аналогично, при соотношении параметров, приведенных во второй строке таблицы, существование решений уравнения (17) можно ожидать также на неограниченном множестве значений y - вещественной оси за исключением отрезка $[y_1, y_2]$. Значит и в этом случае свести к конечному перебору решение задачи не удастся. Справедливости ради отметим, что НИКОГДА в реальных или демонстрационных вариантах ЕГЭ нам не приходилось встречать уравнение, в котором выполнялось бы условие $(4ab_2 - c^2) < 0$. Если же такое все-таки встретится, то придется искать иной путь к его решению.

При выполнении условий на параметры, отраженных в третьей строке таблицы дискриминант уравнения (17) $D(y)$ является отрицательным при всех значениях переменной y , а, значит, это уравнение вещественных корней не имеет.

Наконец, четвертая строка таблицы соответствует такому соотношению параметров исходного уравнения, когда дискриминант $D(y)$ является неотрицательным только на отрезке $[y_1, y_2]$. Поскольку на этом отрезке находится конечное количество целых чисел, окончание решения уравнения (17) уже очевидно. Надо перебрать последовательно все целые числа из промежутка $[y_1, y_2]$. При каждом из них квадратное уравнение (17) относительно неизвестной x имеет решения, т.к. его дискриминант положителен. В качестве ответа выбираем все те пары (x, y) , в которых значение неизвестной также целое число. Если, конечно, такие x найдутся.

В качестве примера разберем решение уравнения (15).

Задача 2. Решить в целых числах уравнение $4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0$ [2].

Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно неизвестной x :

$$4x^2 - 2(y + 1)x + (2y^2 + y - 1) = 0 \quad (23)$$

Дискриминант этого уравнения как функция переменной y :

$$D(y) = -28y^2 - 8y + 20. \quad (24)$$

Для определения, при каких значениях переменной y эта функция принимает неотрицательные значения (т.е. при каких y квадратное уравнение (23) относительно x имеет решения), найдем дискриминант дискриминанта $D(D(y)) = 64 + 4 \cdot 28 \cdot 20 = 2304 > 0$. Корни уравнения (23) равны $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{5}{7}$, и соответственно в промежутке между этими числами дискриминант $D(y) > 0$, на концах этого промежутка $D(y) = 0$. На отрезке $[y_1, y_2]$ расположены два целых числа $y = -1$, $y = 0$. При этих значениях y найдем корни уравнения (23):

$$y = -1 \Rightarrow 4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Z};$$

$$y = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} \notin \mathbb{Z}.$$

Ответ: (0,-1).

Ответ к уравнению (13):(4,-1);(4,-5);(-4,-1);(-4,-5). Ответ к уравнению (14):(0,0);(1,0);(0,1);(1,2);(2,1);(2,2). Ответ к уравнению (16):(-2,-1);(-2,-2);(0,-1);(0,0).

**Урок №3. Признаки делимости в применении к
решению уравнений в целых числах**

При решении задач типа С6 ЕГЭ по математике нередко приходится рассматривать вопросы, связанные с делимостью натуральных чисел. Признаки делимости на 2, 3, 5 и 9 изучаются в школьной программе. Однако, для решения задач типа С6 только этих признаков может оказаться недостаточным. Докажем две теоремы о делимости квадратов натуральных чисел на 3 и 4, и покажем, как эти теоремы можно использовать для решения ряда задач типа С6.

Теорема 1. Если $x \in \mathbb{N}$, то x^2 или делится на 3, или при делении на 3 дает в остатке 1.

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{N}$ справедливо

$$x = \begin{cases} 3k \\ 3k + 1 \\ 3k + 2 \end{cases}, \text{ где } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для x^2 имеет место

$$x^2 = \begin{cases} (3k)^2 \\ (3k + 1)^2 \\ (3k + 2)^2 \end{cases} = \begin{cases} 9k^2 \\ 3(3k^2 + 2k) + 1 \\ 3(3k^2 + 4k) + 3 + 1 \end{cases},$$

что и доказывает теорему.

Теорема 2. Если $x \in \mathbb{N}$, то x^2 или делится на 4, или при делении на 4 дает в остатке 1.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Формулировки, доказательства теорем и задачи 4 и 5 изложены с использованием материалов, содержащихся в [4].

Задача 3. Решить в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$ [3].

Решение. Рассмотрим три случая: $n < 0$, $n = 0$, $n > 0$.

1 случай. При любом $n < 0$ и целом x в левой части уравнения стоит число с отличной от нуля дробной частью, а в правой – целое число. Следовательно, в этом случае уравнение решений не имеет.

2 случай. При $n = 0$ имеем $3^0 + 8 = x^2$. Следовательно, пара чисел $n = 0, x = 3$ является решением уравнения.

3 случай. При $n > 0$ число, стоящее в левой части уравнения при делении на 3 дает в остатке 2, а число, стоящее в правой части, по теореме 1 или делится на 3, или при делении на три дает в остатке 1. Таким образом, в этом случае уравнение целых решений не имеет.

Ответ: $(n = 0, x = 3)$.

Задача 4. В десятичной записи 12-значного числа N цифры 2 и 9 встречаются по 2 раза, остальные – по одному. Может ли число N быть точным квадратом?

Решение. Сначала покажем, что любое натуральное число M и сумма его цифр дают при делении на 3 одинаковые остатки. Действительно, если M имеет в десятичной записи m цифр $a_1, a_2, \dots, a_m$, то можно записать цепочку равенств

$$M = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-1} \cdot 10^1 + a_m =$$

$$= \left(a_1 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{m-1 \text{ девяток}} + a_2 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{m-2 \text{ девяток}} + \dots + a_{m-1} \cdot 9 \right) + (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m).$$

Поскольку каждое из слагаемых, стоящих в первых круглых скобках делится на три, то число M при делении на 3 дает такой же остаток, как и число во вторых круглых скобках, которое и представляет собой сумму цифр числа M . Утверждение доказано.

Сосчитаем сумму цифр числа N :

$$2 \cdot (2 + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 56 = 18 \cdot 3 + 2.$$

Поскольку эта сумма при делении на 3 дает в остатке 2, то по доказанному утверждению такой же остаток при делении на 3 дает и само число N . Следовательно, по теореме 1 число N не может быть точным квадратом.

Задача 5. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 23?

Решение. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Его дискриминант $D = b^2 + 4ac$. Первое слагаемое является квадратом целого, а, значит, и натурального числа. По теореме 2 оно или делится на 4, или

при делении на четыре дает в остатке 1. Второе слагаемое делится на 4, следовательно, дискриминант любого квадратного уравнения или делится на 4, или при делении дает в остатке 1. Число 23 при делении на 4 дает в остатке 3 и, следовательно, не может быть дискриминантом квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Литература

1. Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / авт.-сост. А.П. Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова и др. – М: АСТ: Астель, 2010. – 318,[2] с. (Единый государственный экзамен).
2. Фалин Г.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006- 367с.
3. Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ. Математика. Тематическая рабочая тетрадь 11 класс. – М.: МЦНМО, Изд-во «Экзамен», 2010 – 96с.
4. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Учебное пособие для 10-11 кл. сред.шк. – М.: Просвещение, 1990 – 48 стр.