Васильев Юрий Павлович

инженер - механик

город Тольятти

НОВЕЙШАЯ ФОРМУЛА ДЛИНЫ ДУГИ

О НОВОЙ ФОРМУЛЕ ДУГИ

Предлагаемая формула длины дуги обладает очевидной новизной, на фоне известных способов вычисления дуг. Она построена на правилах элементарной геометрии, доступна в обращении любому пользователю от школьника до специалиста, обеспечивает высокую точность вычисления длины дуги. Двадцатилетний стаж эксплуатации, к сожалению частного пользования (коллеги, друзья), подтвердил ее надежность использования в расчетах. Для вычисления длины дуги по этой формуле достаточно иметь два параметра ; длину опорной хорды АВ и сумму межхордовых углов ($\alpha + \beta$) смотри Рис.3. Данная формула обеспечивает не только точность вычисления длины любой дуги, но также и возможность вычислять параметры самой окружности, ее длину и диаметр.

ВВЕДЕНИЕ

1. Известна формула Гюйгенса позволяющая определять, с относительной погрешностью, длину дуги. Причем неизвестно, какую часть окружности составляет эта дуга и каков ее радиус, смотри Рис. 1.

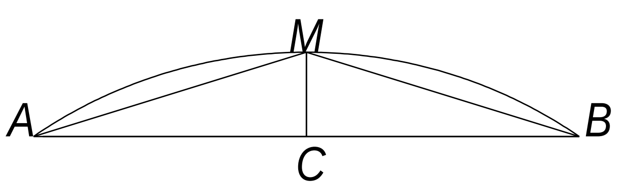


Рис. 1

Формула Гюйгенса : $p \approx 2l + 1/3\ (2l - L)$ Где: p – (приближенная) длина дуги AMB, l = AM (хорда) и L =AB (опорная хорда), стр. 286 [1].

2. Известна другая формула дуги в n градусов: формула (5) стр. 285 [1].

$$p = \pi \cdot r \cdot n^{\circ} / 180^{\circ}$$

Для расчета длины дуги по этой формуле необходимо знать величину центрального угла n в окружности.

3. Известна также формула длины дуги в радианах : $L = R \cdot < \alpha^0$

Где : L – длина дуги окружности, R- радиус окружности, $< \alpha^0$ – радианная мера центрального угла этой окружности, опирающегося на эту дугу, стр. 54. [2]. Наряду с этими, существует много иных способов расчета длин дуг, как составных частей окружности.

Но перейдем к новейшей формуле.

НОВЕЙШАЯ ФОРМУЛА ДЛИНЫ ДУГИ

$$\textbf{(1)} \quad L = \frac{\pi \cdot \ell}{Sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{180^{\bullet}}$$

Где: L – длина искомой дуги , ℓ = AB - длина опорной хорды; $(\alpha_1 + \beta_1)$ – сумма межхордовых углов, образованных опорной хордой AB и хордами AC и BC к произвольно заданной точке C на дуге ACB смотри Рис. 2, верхняя часть. Эта же формула справедлива и для нижней дуги ADB. Здесь также ℓ = AB опорная (общая) хорда, а $(\alpha_2 + \beta_2)$ - сумма межхордовых углов, нижняя часть.

Теорема Дуги: Длина Дуги по трем заданным точкам, равна произведению числа Пи на длину опорной хорды построенной по точкам A и

В, поделенного на синус суммы межхордовых углов α и β к третьей точке С и умноженного на сумму этих углов поделенную на 180°.

Рассмотрим нашу формулу в применении, смотри Рис. 2. На этом рисунке изображена окружность с дугами АСВ (верх) и АDВ (низ). Остановимся пока на верхней дуге АСВ. Здесь известно, заданное положение точки C_1 на дуге АСВ, AC_1 и BC_1 хорды (выделены штриховыми). Углы $\angle C$ и $\angle C_1 = \varphi$ вписанные и равны между собой, как опирающиеся на данную дугу, стр. 287 [1]. Поэтому заданную точку C_1 смело перемещаем в положение точки С. На этом же условии перемещаем и точку D_1 в положение D. В результате мы получаем симметричную фигуру вписанную в окружность, состоящую из двух дуг, с общей опорной хордой АВ и межхордовыми углами $(\alpha_1 + \beta_1)$ и $(\alpha_2 + \beta_2)$. Здесь вписанные треугольники САD и СВD прямоугольные и равны между собой, как вписанные и опирающиеся на диаметр СD, Рис. 125, стр. 287 [1], их сумма $\angle CAD + \angle CBD = 90^{\circ} + 90^{\circ} = 180^{\circ}$. Сумма углов :

$$(\alpha_1 + \alpha_2) = 90^{\circ} \text{ и } (\beta_1 + \beta_2) = 90^{\circ} \text{ или } (\alpha_2 + \beta_2) = 180^{\circ} - (\alpha_1 + \beta_1)$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ФОРМУЛЫ

Проверим правильность наших рассуждений и формулу Дуги на примере Рис. 2. Для чего мы вычислим длину, сначала дуги АСВ, а затем АDВ, после чего суммировав длины этих дуг определим длину их общей окружности, но перед этим определим ее диаметр и длины дуг и сравнив их убедимся в пра - вильности наших рассуждений по формуле. Примем, Рис. 2 : $d_{ОКР} = 100$ мм.; АВ = 80 мм.; $(\alpha_1 + \beta_1) = ?$ Из треугольника OFB: $OF^2 = OB^2 - FB^2 = R^2 - (AB/2)^2 = 2500 - 1600 = 900$; OF = 30, а CF = R –OF = 20 . $\operatorname{tg} \alpha_1 = CF/AF = 20/40 = 0{,}5$.

Откуда $\alpha_1 = 26{,}565^{\circ}$, $(\alpha_1 + \beta_1) = 2\,\alpha_1 = 53{,}13^{\circ}$, а $(\alpha_2 + \beta_2) = 180^{\circ} - 53{,}13^{\circ} = 126{,}87^{\circ}$

Длина дуги АСВ, будет: $L_{ACB} = \dfrac{\pi \cdot (\ell = 80)}{Sin 53{,}13^{\bullet}} \cdot \dfrac{53{,}13^{\bullet}}{180^{\bullet}} = 92{,}729$ мм.

Длина дуги ADB, будет: $L_{ADB} = \dfrac{\pi \cdot (\ell = 80)}{Sin126,87^{\bullet}} \cdot \dfrac{126,87^{\bullet}}{180^{\bullet}} = 221,430$ мм.

Длина окружности $C_{ОКР}=L_{ACB}+L_{ADB}=$ 92,729 + 221,430= **314,159 мм.**

Длина окружности $C_{ОКР} = \pi\, d =$ 3,14159 · 100 = **314, 159 мм.**

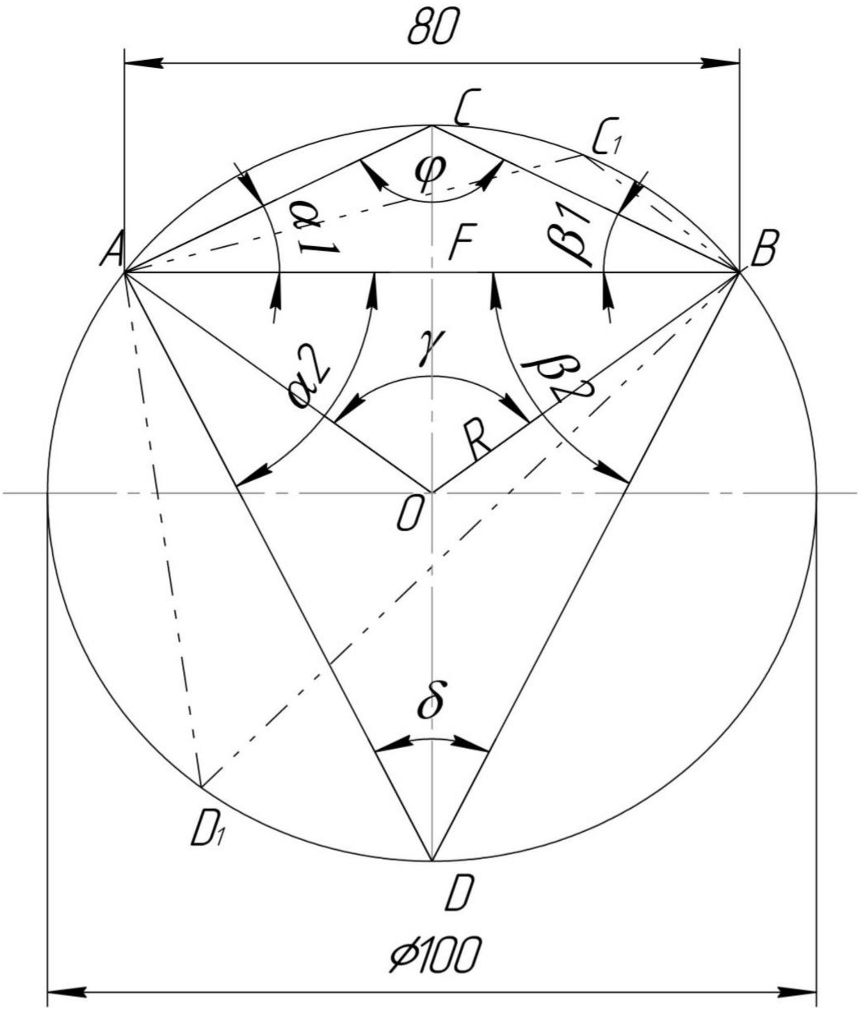


Рис. 2

Предложенная формула Дуги позволяет рассчитать длину любой дуги и при отсутствии заданных межхордовых углов, все что для этого нужно, это наличие самой дуги с опорной хордой, смотри Рис. 3. В этом случае существуют два варианта расчета заданной дуги.

Вариант 1: Самостоятельно построить углы α и β из точек А и В, к произвольно выбранной точке С на дуге и определить их сумму (α + β), длина АВ известна.

Полученную длину дуги в этом случае, смотри в варианте 2.

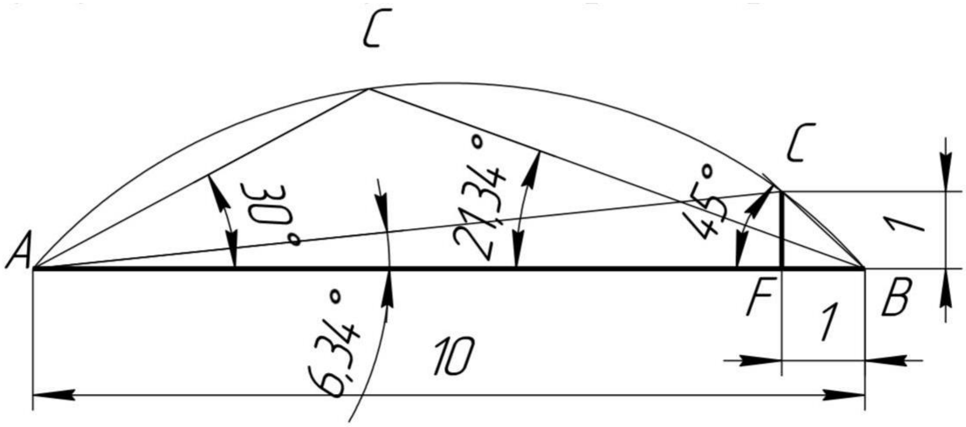


Рис. 3

Вариант 2 : Построив на любом расстоянии FB точку F, восстановим через нее перпендикуляр до пересечения его с дугой в точке С. Замерив или рассчитав по линейным размерам полученные значения хордовых углов, и вставив их в формулу Дуги получим искомую длину дуги.

Пример : Дано – FB = 1м.; FC = 1м.; AB = 10м.; β = 45° α = ?

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 1/9 = 0{,}1111 \qquad \alpha = 6{,}5666$$

Длина дуги будет: $L_{ACB} = \dfrac{10\cdot\pi}{Sin 51{,}5666^{\circ}}\cdot\dfrac{51{,}5666^{\circ}}{180^{\circ}} = 40.1071\cdot 0{,}2865 = 11{,}49$ м.

Ответ : L = 11,49 м.

КОНТРОЛЬНЫЙ РАСЧЁТ ДУГ

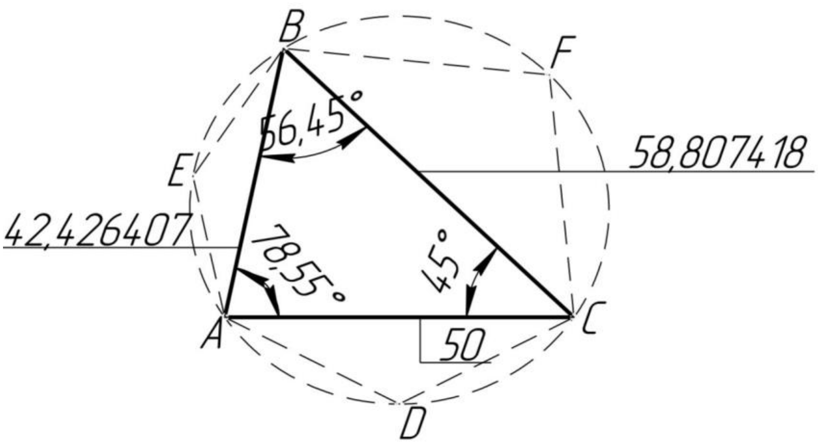
Проверим нашу формулу на более сложном примере. Для чего возьмем треугольник произвольной формы с известными углами и размерами сторон, см. Рис. 4, (на компьютере построить подобный треугольник можно без проблем). Затем, принимая каждую из сторон треугольника за опорную хорду, а внутренние углы как межхордовые, посчитаем значения длин дуг образованных на этих хордах. У нас каждой хорде соответствуют по две дуги. Определив длины этих дуг и сложив их попарно, мы получим длину окружности в трех вариантах, по числу сторон треугольника. Итак начнем со стороны AC.

<u>Случай 1 :</u> Известно: AC = 50 – опорная хорда, межхордовые углы $(\alpha_1 + \beta_1) = (78{,}55 + 45) = 123{,}55\ ^{\circ}$**.** Длины дуг этой хорды :

$$L_{AEBFC} = \frac{50 \cdot \pi}{Sin123{,}55^{\circ}} \cdot \frac{123{,}55^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{157{,}0795}{0{,}8334} \cdot 0{,}6864 = 129{,}373 \text{ мм.}$$

Для дуги ADC : AC =50 – опорная хорда. Сумма межхордовых углов $(\alpha_2 + \beta_2) = 180 - (\alpha_1 + \beta_1) = 56{,}45^{\circ}$, смотри рассуждения выше.

$$L_{ADC} = \frac{AC \cdot \pi}{Sin56{,}45^{\circ}} \cdot \frac{56{,}45^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{50 \cdot \pi}{0{,}8334} \cdot 0{,}31361 = 59{,}109 \text{ мм.}$$ Длина окружности по сумме этих дуг будет: $C_{OKP} = L_{AEBFC} + L_{ADC} = 129{,}373 + 59{,}109 = 188{,}48$ **<u>C_1 = 188,48 мм.</u>**



<u>Рис. 4.</u>

Аналогичным образом посчитаем длины дуг по хордам AB и BC.

<u>Случай 2 :</u> Опорная хорда AB = 42,426407 мм. Межхордовые углы в дуге BFCDA - ($\alpha_1 + \beta_1$) = 56,45° + 78,55° =135°, а в дуге AEB - ($\alpha_2 + \beta_2$) = 45°.

$$L_{BFCDA} = \frac{AB \cdot \pi}{Sin135^\circ} \cdot \frac{135^\circ}{180^\circ} = \frac{133,28637}{0,707106} \cdot 0,75 = 141,3717$$

$L_{AEB} = \dfrac{AB \cdot \pi}{Sin45^\circ} \cdot \dfrac{45^\circ}{180^\circ} = \dfrac{42,426407 \cdot 3,14159}{0,707106} \cdot 0,25 = 47,1425$ мм. Длина оружности по сумме этих дуг будет:

$$C_{OKP} = L_{BFCDA} + L_{AEF} = 141,3717 + 47,1197 = 188,49 \text{ мм.}$$ **<u>С $_2$ = 188,49 мм.</u>**

<u>Случай 3 :</u> Опорная хорда BC = 58,807418 мм. Межхордовые углы в дуге CDAEB - ($\alpha_1 + \beta_1$) = 56,45° + 45° = 101,45°, а в дуге BFC - ($\alpha_2 + \beta_2$) = 78,55°.

$$L_{CDAEB} = \frac{58,807418 \cdot \pi}{Sin101,45^\circ} \cdot \frac{101,45^\circ}{180^\circ} = \frac{184,74879}{0,9801} \cdot 0,56361 = 106,24045 \text{ мм.}$$

$L_{BFC} = \dfrac{58,807418 \cdot \pi}{Sin78,55^\circ} \cdot \dfrac{78,55^\circ}{180^\circ} = 188,499945 \cdot 0.436388 = 82,2593$ мм. И окончательно длина окружности по этим дугам,

$$C_{OKP} = L_{CDAEB} + L_{BFC} = 106,24045 + 82,2593 = 188,499 \text{ мм.}$$ **<u>С $_3$ = 188, 499 мм.</u>**

К полученным по трем вариантам значениям длин окружности описанной по данному треугольнику, можно добавить еще одну длину полученную через диаметр окружности :

$$C_{OKP} = \pi \cdot d = 60 \cdot 3,14159 = 188,49 \text{ мм.}$$ **<u>С $_4$ = 188,49 мм.</u>**

Результат аналогичен трем предыдущим, что и требовалось доказать.

<u>А вот еще один интересный случай дуги,</u> (см. Рис. 5) когда заданы три точки дуги ABC : точки A, B - образующие отрезок AB = 40 и точка C вынесенная далеко за пределы от <u>AB,</u> под углом · ACB =· γ = 6° к ней.

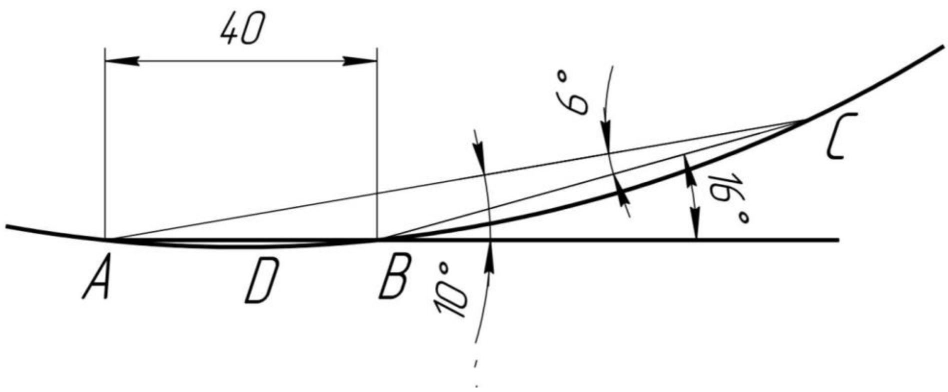


Рис. 5

Требуется рассчитать длины дуг ACB и ADB и параметры окружности построенной по этим 3-м точкам ACB. Проверим, как в этом случае сработает наша формула? Для определения длин дуг ACB и ADB нам вполне хватит двух заданных параметров : AB = 40 и · $\gamma = 6^o$, а необходимые для расчета длин дуг суммы углов посчитаем аналитически $(\alpha_1^o + \beta_1^o) = 180^o - \cdot \gamma = 174^o$ и $(\alpha_2^o + \beta_2^o) = 180^o - (\alpha_1^o + \beta_1^o) = 6^o$.

На Рис. 5 углы α и β не показаны.

Итак длина дуги ACB:

$$L_{ABC} = \frac{l \cdot \pi}{Sin(\alpha_1 + \beta_1)} \cdot \frac{(\alpha_1 + \beta_1)}{180} = \frac{40 \cdot 3{,}14}{Sin174^\circ} \cdot \frac{174^\circ}{180^\circ} = 1161{,}77$$

Длина дуги ADB :

$$L_{ABC} = \frac{l \cdot \pi}{Sin(\alpha_2 + \beta_2)} \cdot \frac{(\alpha_2 + \beta_2)}{180} = \frac{40 \cdot 3{,}14}{Sin6^\circ} \cdot \frac{6^\circ}{180^\circ} = 40{,}06$$

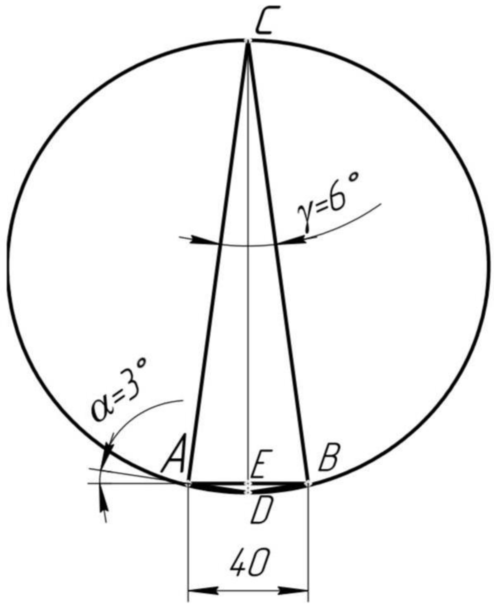
В результате без всяких лишних построений и расчетов, сложив эти две дуги, мы получим значение длины окружности, построенной на этих трех точках.

$C_{ОКР.} = L_{ACB} + L_{ADB}$ =1161,77 + 40,06 =1201,83.

Диаметр ее $D_{ОКР} = C_{ОКР}/\pi$ =_82,7.

<u>Кстати :</u> этот же результат диаметра $D_{ОКР}$ мы можем получить также с помощью двух заданных параметров (AB = 40 и · $\gamma = 6^{o}$) воспользовавшись правилом вписанных углов, смотри стр. 1 в начале этой статьи и Рис. 5 и 6. Где имеем, треугольники CAD и CBD, <u>прямые, как вписанные и опирающиеся на диаметр CD, Рис. 125, стр. 287 [1],</u> сумма этих углов $\angle$ CAD + $\angle$ CBD = 180^{o} . У них CD = CE + ED = $D_{ОКР}$ = 20 ctg 3^{o} + 20 / ctg 3^{o} = 382,7, т. е. результат диаметра полученный с применением новой Формулы.

Рассмотренные результаты возможных вариантов применения Формулы, позволяют сделать вывод, что расчеты дуг и окружностей можно производить без лишних построений, по 3-м заданным точкам, как в случае Рис. 5 или Рис. 6.



<u>Рис. 6</u>

И в заключение о формуле Дуги. По настоящее время расчеты длин дуг производились сложными математическими вычислениями, порой с помощью интегралов, не совсем доступных широкой массе пользователей. В моем случае, как и в случае построения окружности по 3-м точкам, стр. 256 п. 13 [1], достаточно иметь три точки с двумя заданными параметрами : - расстояние между двумя любыми точками и значение угла опущенного из 3-ей точки к концам этого отрезка. Подставив эти данные в мою новую формулу получим не только длину дуги, но и длину самой окружности, по этим 3-м точкам, смотри примеры в тексте выше.

Итак, мы рассмотрели случаи подсчета длин дуг, характерные для градусных измерений межхордовых углов. Однако, в школьной программе существует еще радианная мера углов, рассмотрим и нашу формулу в радианной мере углов. Учитывая, что в радианах угол $180^\circ = \pi$ получим формулу длины дуги в радианах : $L = \frac{\ell \cdot (\alpha + \beta)}{Sin(\alpha + \beta)}$ а учитывая, что $(\alpha + \beta) = (\pi - \gamma)$ смотри Рис . 5 и 6 будем иметь значение дуги в радианах: $L = \frac{\ell \cdot (\pi - \gamma)}{Sin(\pi - \gamma)} = \frac{\ell \cdot (\pi - \gamma)}{Sin\gamma}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ

Требуется доказать формулу для вычисления длины дуги **(1),** общий вид :

(1) $$L = \frac{\pi \cdot \ell}{Sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{180^\circ}$$

Для доказательства построим три произвольные окружности, с хордой АС выше центра в т. О и с произвольными точками B и D на окружности, Рис. 1, с диаметром BD, Рис. 2 и с хордой АС ниже центра окружности, Рис. 3. Примем : АС = ℓ - стягивающая хорда, угол $\angle$ ВАС = α_1, $\angle$ ВСА = α_2 , Рис. 1. Само доказательство проведем на базе формулы дуги в радианах (**2**), а именно**.**

Формула длины дуги в радианах : В радианной мере, длина дуги равна произведению длины радиуса R окружности на радианную меру центрального угла $\angle$ АОС, пример Рис. 1, опирающегося на эту дугу, стр. 54 [2].

(2) $$L = R \cdot \angle AOC$$

Для удобства доказательства, перенесем вершины вписанных углов, $\angle$B и $\angle$D , Рис. 1, в симметричное положение, на Рис. 2., при этом величина этих углов не изменится, так как все вписанные углы, опирающиеся на данную дугу, равны между собой, стр. 287 [1]. В результате мы получили вписанные углы : $\angle ABC=180^{\circ}-(\alpha_1+\alpha_2)$, Рис.1и $\angle ABC=(180^{\circ}–2\alpha)$, Рис. 2.

Здесь же, углы $\angle$ BAD и $\angle$ BCD прямые, как вписанные и опирающиеся на диаметр BD, Рис. 125, стр. 287 [1].

Сумма этих углов $\angle BAD + \angle BCD = 90^{\circ} + 90^{\circ} = 180^{\circ}$.

Замечание : Существует три случая расположения хорды AC, а) когда хорда отрезает дугу ABC меньшую половины окружности, Рис. 1, б) когда хорда равна диаметру AC = BD окружности, Рис.2, c) когда хорда отрезает дугу ABC большую половины окружности, Рис. 3. А теперь рассмотрим доказательство формулы (1), для каждого из этих трех случаев, опираясь на формулу (2) в радианах .

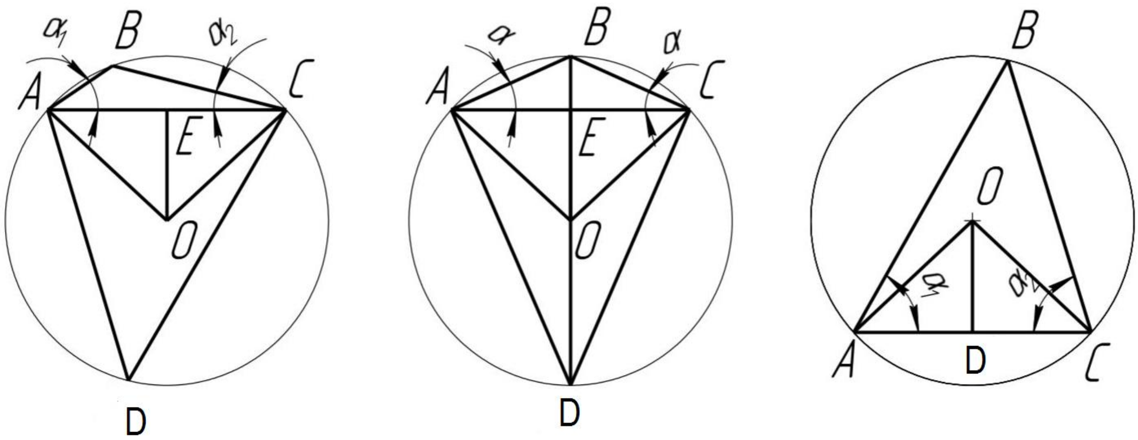


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Для этого в формуле (2) выразим R и $\angle$ AOC через заданные ℓ ,α_1 и α_2 и рассмотрим четырехугольник ABCD, Рис. 2, сумма внутренних углов которого равна $180^{\circ}\cdot(n -2) = 360^{\circ}$, где n – число сторон, стр. 270 [1]. Сумма углов $\angle ABC+\angle АДС = 360^{\circ} – (\angle BAD + \angle BCD) = 360^{\circ} - 180^{\circ} = 180^{\circ}$, откуда вписанный угол $\angle ADC = 180 - \angle ABC = 180 – (180 – (\alpha_1 + \alpha_2)) = (\alpha_1 + \alpha_2)$. Мы знаем, что вписанный угол ADC = $(\alpha_1 + \alpha_2)$, равен половине центрального угла AOC, опирающегося на ту же дугу , стр. 287 [1], следовательно, $\angle AOC = 2\angle ADC = 2(\alpha_1+ \alpha_2)$, а угол $\angle AOE = \angle AOC /2 = (\alpha_1+ \alpha_2)$, но $\text{Sin}\angle AOE = AE/AO = \ell /2R$, окуда R = AE/Sin∠AOE = AC/2Sin∠AOE = ℓ /2Sin(α_1+ α_2). Подставляя полученные R и ∠AOC в формулу (2) получим длину дуги, для каждого из трех случаев, а именно:

Случай № 1: Когда хорда AC = ℓ отрезает дугу ABC меньшую, чем половина окружности, Рис. 1. Длина этой дуги будет равна:

L_{ABC} =R · ∠AOC или $L_{ABC}=\frac{\ell\cdot<AOC}{2Sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{\ell\cdot 2(\alpha_1+\alpha_2)}{2Sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{\ell\cdot(\alpha_1+\alpha_2)}{Sin(\alpha_1+\alpha_2)}$ - в радианной мере. Умножив это выражение на $\frac{\pi}{180^\circ}$ получим длину дуги ABC в градусной мере $L_{ABC}=\frac{\ell\cdot(\alpha_1+\alpha_2)}{Sin(\alpha_1+\alpha_2)}\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\pi\cdot\ell}{Sin(\alpha_1+\alpha_2)}\cdot\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{180^\circ}$ - или выражение формулы (1).

Случай № 2: Когда хорда AC совпадает, например, с диаметром ВД, Рис. 2. В этом случае углы $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$, их сумма ($\alpha_1$+ α_2) = 90° = 180°/2, а длина дуги, $L_{ABC}=\frac{\pi\cdot(\ell=d)}{Sin(\alpha_1+\alpha_2)}\cdot\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{180^\circ}=\frac{\pi\cdot\ell}{1}\cdot\frac{90^\circ}{180^\circ}=\frac{\pi\cdot\ell}{2}$ что равно длине полуокружности.

Случай № 3: Когда хорда AC = ℓ отрезает дугу ABC большую, чем половина окружности, Рис.3. Здесь AO = OC = R, вписанный ∠ABC = 180° - (α_1+ α_2) = = ∠ AOD, центральный ∠ AOC = 2 ∠ABC = 2(180° - (α_1+ α_2)) = (2π - 2(α_1+ α_2)), а Sin ∠ AOD = AD/AO = ℓ /2R, откуда R = ℓ /2Sin(180° - (α_1+ α_2)) = ℓ /2Sin(α_1+ α_2). Величина же центрального угла , ∠ C° опирающегося на дугу ABC, будет ∠ C° = ∠ (360° - ∠ AOC) =(2π - ∠ AOC) = (2π - 2 π +2(α_1+ α_2)) = 2(α_1+ α_2) и длина дуги ABC: L_{ABC}=R·2(α_1+ α_2) или . $L_{ABC}=\frac{\ell\cdot 2(\alpha_1+\alpha_2)}{2Sin(\alpha_1+\alpha_2)}$ Умножив это выражение на $\frac{\pi}{180^\circ}$ получим - также

$L_{ABC}=\frac{\pi\cdot\ell}{Sin(\alpha_1+\alpha_2)}\cdot\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{180^\circ}$ формулу (1).

Использованная литература :

[1] - М.Я. Выгодский «Справочник по элементарной математике»

[2] - П.Я. Кожеуров «Тригонометрия»

[3] - Ю.П. Васильев «Формулы Числа Пи и Отрезка Дуги» 2010 г.