Королева Елена Геннадьевна
преподаватель математики
Федеральное государственное казенное общеобразовательное учреждение «Нахимовское военно-морское училище Министерства обороны Российской Федерации»
г. Санкт-Петербург

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

(для учащихся 8-х классов)

Тема «Квадратные уравнения» занимает одно из самых важных тем не только курса алгебры 8 класса, но и вообще всего курса математики. Поэтому нужно на нее обратить особое внимание. Приведенные ниже опорные конспекты помогают учащимся разобраться в данной теме даже самостоятельно.

Немного истории:

Уже примерно за 2000 лет до нашей эры Вавилоняне знали, как решать квадратные уравнения. Решение их в Древнем Вавилоне было тесно связано с практическими задачами, в основном такими, как измерение площади земельных участков, земельные работы, связанные с военными нуждами; наличие этих познаний также обусловлено развитием математики и астрономии вообще. Были известны способы решения как полных, так и неполных квадратных уравнений.

Правила решения квадратных уравнений во многом аналогичны современным, однако в вавилонских текстах не зафиксированы рассуждения, путём которых эти правила были получены.

Задачи, решаемые с помощью квадратных уравнений, встречаются также в трактате по астрономии «Ариабхаттиам», написанным индийским астрономом и математиком Ариабхатой в 499 году нашей эры. Другим индийским учёным, Брахмагуптой, было изложено универсальное правило решения квадратного уравнения, приведённого к каноническому виду: $ax^2 + bx = c$; притом предполагалось, что в нём все коэффициенты, кроме a могут быть отрицательными. Сформулированное учёным правило по своему существу совпадает с современным.

1. Тема: Решение квадратных уравнений

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа ($a \neq 0$)- называется **квадратным.**

Если b = 0 или c = 0, или b=0 и c=0, то уравнения называются **неполными.**

Алгоритм решения уравнения

1. Неполные квадратные уравнения:

а) если c = 0, то уравнение примет вид: $ax^2 + bx = 0$.

Такое уравнение решается путем вынесения общего множителя за скобки.

$$x(ax + b) = 0$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один множитель равен нулю.

Например: $2x^2 + 3x = 0$

$x(2x + 3) = 0$

$x = 0$ или $2x + 3 = 0$, $x = -1{,}5$

Ответ: -1,5; 0.

б) если b=0, то уравнение примет вид: $ax^2 + c = 0$.

Такое уравнение решается путем выражения x^2. Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда выражение $-\frac{c}{a} > 0$.

Например: $3x^2 - 12 = 0$ | $2x^2 + 8 = 0$

$x^2 = 4$ | $x^2 = -4$

$x = \pm 2$ Ответ: ± 2 | Ответ: нет корней.

в) если b=0 и c=0, тогда уравнение примет вид: $ax^2 = 0$.

В этом случае уравнение всегда будет иметь один корень: $x = 0$.

2. Полное квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$

1. Вычисляем дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

если D<0, то уравнение решений не имеет;

если D=0, то уравнение имеет один корень, который вычисляется по формуле: $x = -\frac{b}{2a}$;

если D>0, то уравнение имеет два корня: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Например: 1. $2x^2 + 3x + 5 = 0,\ a = 2,\ b = 3,\ c = 5$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$ – корней нет

Ответ: корней нет.

2. $4x^2 + 4x + 1 = 0, a = 4,\ b = 4,\ c = 1$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$ – один корень

$x = \frac{-b}{2a}$ $\quad x = \frac{-4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$

Ответ: -0,5.

3. $2x^2 + 3x - 5 = 0,\ a = 2,\ b = 3,\ c = -5$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 - (-40) = 49 > 0$ – два корня

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $\quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$ $\quad x = \frac{-3+7}{4} = 1,\ \ x = \frac{-3-7}{4} = -2{,}5$

Ответ: -2,5; 1

2. Тема: Решение квадратных неравенств.

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c \geq 0;\ ax^2 + bx + c < 0;\ ax^2 + bx + c \leq 0$), где a, b, c – некоторые числа ($a \neq 0$)- называется **квадратным.**

Алгоритм решения квадратных неравенств:

1. Привести неравенство к виду:

$ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c \geq 0;\ ax^2 + bx + c < 0;\ ax^2 + bx + c \leq 0$). Для этого

перенести слагаемые из правой части в левую, поменяв знак слагаемых на противоположный (знак неравенства при этом не меняется).

2. Привести подобные слагаемые (если они есть).

3. Приравнять к нулю и решить полученное квадратное уравнение (смотри опорный конспект для решения квадратных уравнений).

4. Найденные корни выставить на координатный луч (если знак неравенства строгий, то точка выколотая, если знак неравенства не строгий, то точка жирная).

5. Расставить знаки, начиная с крайнего правого, для этого нужно посмотреть на знак главного коэффициента (если он больше нуля, то ставим плюс, если меньше нуля, то минус).

Дальше знаки чередуются, если нет четного корня (четный корень получается, если при решении квадратного уравнения получаются одинаковые корни).

6. Выбрать нужные промежутки (если мы решаем неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c \geq 0$, то выбираем знаки « $+$ », если неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c \leq 0$, то выбираем знаки " $-$ ".

7. Записать ответ в виде неравенства или промежутков.

Например:

1. $(x-1)(3-2x) > -6$ - раскрываем скобки и переносим все влево.

$3x - 2x^2 - 3 + 2x + 6 > 0$ - приводим подобные слагаемые.

$-2x^2 + 5x + 3 > 0$ - приравниваем к нулю и решаем квадратное уравнение.

$-2x^2 + 5x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 49$

$x_1 = 3; \quad x_2 = -0{,}5$ - чертим координатный луч и выставляем полученные корни (т.к. знак неравенства строгий, то точки выколотые)

- расставляем знаки, начиная с правого (т.к. $a = -2$) с минуса.

- мы решаем неравенство $-2x^2 + 5x + 3 > 0$, то выбираем " $-$ " .

Ответ: $(-\infty; -0{,}5); (3; \infty)$.

2. $\frac{x^2}{6} > \frac{2x-3}{2}$ - переносим все влево.

$\frac{x^2}{6} - \frac{6x-9}{6} > 0$ - приводим к общему знаменателю.

$\frac{x^2-6x+9}{6} > 0$ - чтобы избавиться от знаменателя умножим на 6.

Знак неравенства не изменится.

$x^2 - 6x + 9 > 0$ Приравняем к нулю и решим квадратное уравнение.

$x^2 - 6x + 9 = 0$ Получаем два одинаковых корня.

$x_{1,2} = 3$ Выставляем на числовой луч (знак неравенства строгий, значит точка выколотая)

Т.к. получилось два одинаковых корня, то при переходе через него знак не меняется.

Справа " + " и слева тоже " + ".

Ответ: $(-\infty; 3); (3; \infty)$.