Жувикина Ирина Алексеевна
учитель математики, учитель физики, доктор физико-математических наук
Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №352
г. Санкт-Петербург
Маховер Михаил Сергеевич
учитель математики, заслуженный учитель Российской Федерации
Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа «Гимназия №11»
г. Санкт-Петербург

# УРОК ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА – ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Дана разработка двух уроков подготовки к ЕГЭ по математике. Урок №1 – обобщающее повторение основных понятий математического анализа, которыми необходимо владеть на ЕГЭ по математике для решения заданий, связанных с исследованием функций на возрастание-убывание, экстремумы, наибольшее и наименьшее значение. Урок №2 посвящен разбору конкретного типа заданий, встречавшихся в разные годы в сборниках по подготовке к ЕГЭ по математике.

**Урок №1.**

**Функция.** Функцией называется такое отображение одного множества на другое, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент второго множества. Множество, элементам которого ставятся в соответствие элементы другого множества, называется областью определения функции (ООФ). Множество, элементы которого ставятся в соответствие элементам ООФ, называется множеством значений функции

(ОЗФ). Элемент ООФ называются аргументом функции, элемент ОЗФ, который ставится в соответствие аргументу, называется значением функции. Обозначается $y = f(x)$, где $x$ – аргумент функции $f$, $y$ – значение функции $f$, которое поставлено в соответствие аргументу $x$.

В школьном курсе математики рассматриваются только такие функции, у которых и ООФ и ОЗФ являются простейшими числовыми множествами. Такими множествами могут быть вся числовая ось, луч на числовой оси (закрытый или открытый, т.е. включающий или не включающий начало), отрезок на числовой оси (закрытый - включающий оба своих конца, полуоткрытый – включающий один из своих концов и не включающий другой, или открытый – не включающий оба своих конца), а также объединение нескольких таких множеств. Функции, у которых ООФ и ОЗФ являются числовыми множествами, называются числовыми функциями. Поскольку другие функции в школьном курсе математики не изучаются, то числовые функции называют просто функциями.

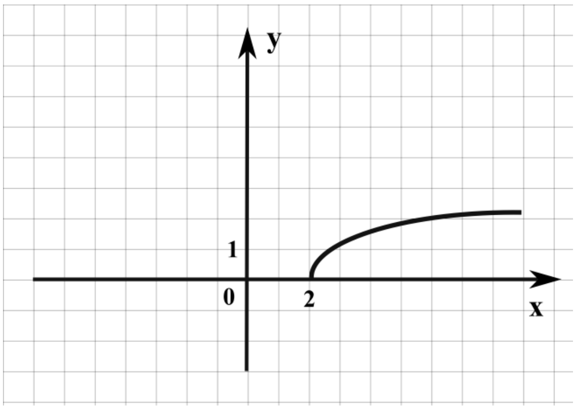


Рис.1

Множество точек на координатной плоскости, абсциссы которых являются аргументами функции, а ординаты – соответствующими значениями функции, называется графиком этой функции (рис. 1).

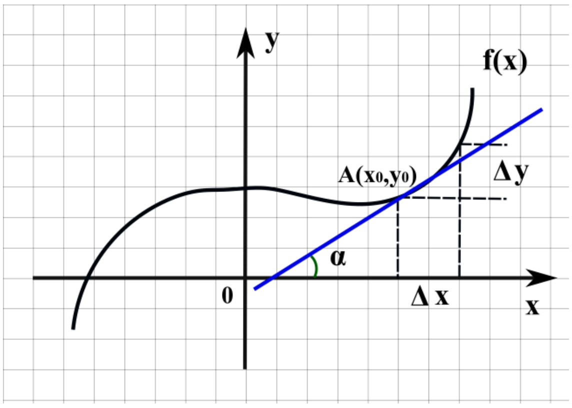


Рис.2

**Производная функции.** Производной $f'(x_0)$ функции $f$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения значения функции $\Delta y$ к соответствующему приращению значения аргумента $\Delta x$, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (рис.2).

Геометрический смысл производной функции в некоторой точке – тангенс угла между касательной к графику функции в этой точке и положительным направлением оси абсцисс $f'(x_0) = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**Непрерывность функции.** Функция называется непрерывной на некотором множестве (области непрерывности), входящем в ее ООФ, если любому малому изменению аргумента в пределах этой области соответствует малое изменение значений функции. Графиком непрерывной функции является кривая, не имеющая разрывов.

**Возрастание – убывание функции.** Функция называется возрастающей на некотором промежутке, входящем в ее область нерерывности, если для любых двух аргументов $x_1, x_2$ из этого промежутка, большему аргументу соответствует большее значение функции: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Производная функции на промежутке ее возрастания принимает неотрицательные значения.

Функция называется убывающей на некотором промежутке, входящем в ее область нерерывности, если для любых двух аргументов $x_3, x_4$ из этого множества, большему аргументу соответствует меньшее значение функции $x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) < f(x_4)$.

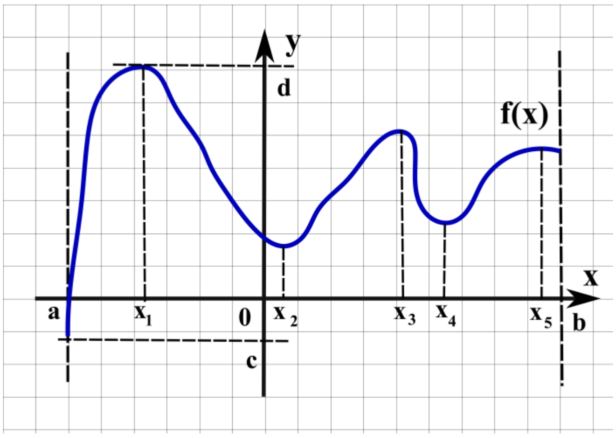


Рис.3

Производная функции на области ее убывания принимает неположительные значения.

**Максимумы и минимумы функции.** Если в пределах области непрерывности функции в некоторой точке ее возрастание сменяется убыванием, то такая точка называется точкой максимума функции. Если в пределах области непрерывности функции в некоторой точке ее убывание сменяется возрастанием, то такая точка называется точкой минимума функции.

В пределах своей ООФ функция может иметь несколько точек максимума и минимума. Собирательно, такие точки называются точками экстремума функции. В точках экстремума функции ее производная обращается в ноль. На рис.3 $x_1, x_3, x_5$ – точки максимумов, $x_2, x_4$ – точки минимумов. Во всех этих точках угол между касательной к графику функции и положительным направлением оси абсцисс равен нулю – касательная горизонтальна.

Важное замечание. Если в некоторой точке из ООФ производная функции обратилась в ноль, то этого еще недостаточно, чтобы сделать вывод о том, что в этой точке достигается экстремум. Когда же по поведению производной функции в окрестности некоторой точки можно сделать вывод о наличии в этой точке экстремума функции? Для того, чтобы в точке, в которой производная функции обращается в ноль, достигался максимум, необходимо, чтобы слева от этой точки производная была бы положительной, а справа – отрицательной. Только тогда мы можем сделать вывод, что функция слева от этой точки, возрастает, а справа – убывает, а, значит, по определению в этой точке достигается максимум функции. Аналогично, чтобы в точке, в которой производная функции обращается в ноль, достигался минимум, необходимо, чтобы слева от этой точки производная была бы отрицательной (функция убывает), а справа – положительной (функция возрастает). Следовательно, по определению в этой точке достигается минимум функции.

**Наибольшее и наименьшее значение функции.** Наибольшее число, принадлежащее ОЗФ, называется наибольшим значением функции. Наименьшее число, принадлежащее ОЗФ, называется наименьшим значением функции. Наибольшее значение функции может достигаться в одной из точек максимума, на концах промежутков непрерывности или на концах ООФ. Наименьшее значение функции может достигаться в одной из точек минимума, на концах промежутков непрерывности или на концах ООФ. На рис.3 наименьшее значение функции $f(x)$ достигается в точке $a$ - на левом конце ООФ и равно $d$; наибольшее значение функции $f(x)$ достигается в одной из точек максимума $x_1$ и равно $c$.

Таким образом, одним из самых существенных моментов при исследовании свойств функций, которые могут встретиться на ЕГЭ по математике является анализ поведения производной.

**Урок №2**

На примерах покажем применение исследования поведения производной к анализу свойств функций.

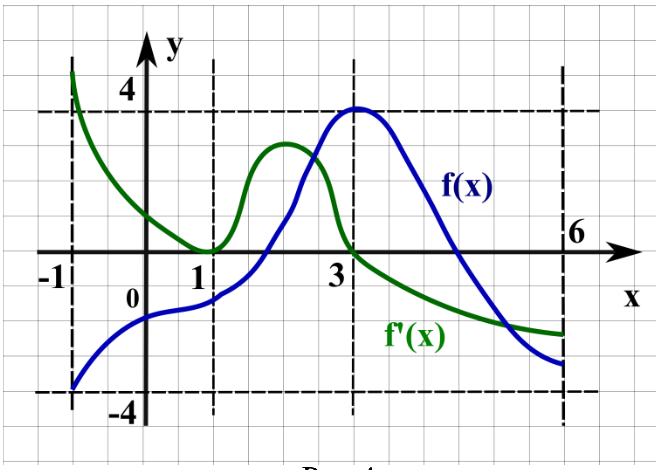

Рис.4

**Задача 1**. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;

в) производная функции на промежутках $(-1; 1)$ и $(1; 3)$ принимает положительные значения, а на промежутке $(3; 6)$ – отрицательные значения;

г) нули производной функции: 1 и 3.

**Решение.** Построим график производной функции, считая, что эта производная сама является непрерывной функцией. На основании условий а) и б) делаем вывод, что на координатной плоскости график лежит в области, ограниченной прямыми $x = -1, x = 6, y = -4, y = 4$. Условия в) и г) позволяют сделать вывод о том, что производная на отрезке $(-1; 3)$ имеет минимум в точке 1, значение этого минимума равно нулю. Поскольку в точке 3 значение производной также равно нулю, а производная по предположению является непрерывной функцией, то делаем вывод, что между точками 1 и 3 производная имеет максимум. Правее точки 3 значения производной, по условию отрицательны, т.е. в точке 3 производная меняет свой знак. Пример графика производной, удовлетворяющий таким свойствам, изображен на рис.4. зеленой линией. Производная обращается в нуль дважды – в точках 1 и 3.

Исследуем эти точки на возможность достижения экстремума. В точке 1 функция не имеет экстремума, т.к. в этой точке производная знак не меняет. Она неотрицательна на всем отрезке $(-1; 3)$, следовательно, на всем этом отрезке функция является возрастающей. В точке 3 производная меняет знак на отрицательный, следовательно, в точке 3 функция имеет максимум.

Исследуем функцию на достижение наибольшего и наименьшего значения. На промежутке $(3; 6)$ функция убывает. Поскольку левее максимума функция только растет, а правее – только убывает, то значение функции в точке максимума будет больше ее значений на концах промежутка. Это означает, что в точке максимума 3 достигается также и наибольшее значение функции 4. Минимумов данная функция не имеет, а значит, наименьшее значение функции -4 достигается в одной из концевых точек -1 или 6. Возможно, и в обеих точках сразу – более точный вывод условие задачи сделать не позволяет. Один из возможных искомых графиков изображен на рис. 4 синей линией.

**Задача 2**. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;

в) производная функции на промежутках $(-3; -1)$ и $(-1; 3)$ положительна, а на промежутке $(3; 5)$ – отрицательна;

г) -1 - единственный нуль производной функции.

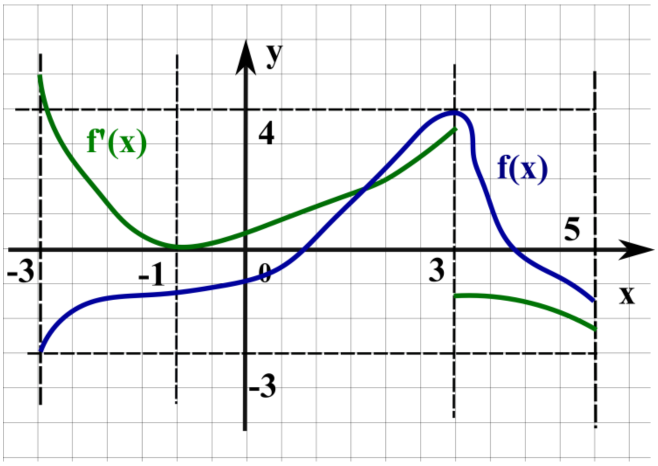


Рис.5

**Решение.** Из условий а) и б) следует, что на координатной плоскости график лежит в области, ограниченной прямыми $x = -3, x = 5, y = -3, y = 4$. Согласно условиям в) и г) производная на отрезке $(-3; 3)$ имеет минимум в точке -1 и значение этого минимума равно нулю. Пример графика производной, удовлетворяющий таким свойствам, изображен на рис. 5 зеленой линией. Производная обращается в нуль в точке - 1 и в точке 3 терпит разрыв.

Исследуем эти точки на возможность достижения экстремума. В точке --1 функция не имеет экстремума, т.к. в этой точке производная знак не меняет. Она неотрицательна на всем отрезке $(-1; 3)$, следовательно, на всем этом отрезке функция является возрастающей. В точке 3 производная меняет знак на отрицательный, следовательно, в точке 3 функция имеет максимум.

Исследуем функцию на достижение наибольшего и наименьшего значения. На промежутке $(3; 5)$ функция убывает. Поскольку левее максимума функция только растет, а правее только убывает, то значение функции в точке максимума будет больше ее значений на концах промежутка. Это означает, что в точке максимума 3 достигается также и наибольшее значение функции 4. Минимумов данная функция не имеет, а значит, наименьшее значение функции

-4 достигается в одной из концевых точек -1 или 6. Возможно, и в обеих точках сразу – более точный вывод условие задачи сделать не позволяет. Один из возможных искомых графиков изображен на рис. 5 синей линией.

**Задача 3**. На рис. 6 изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.

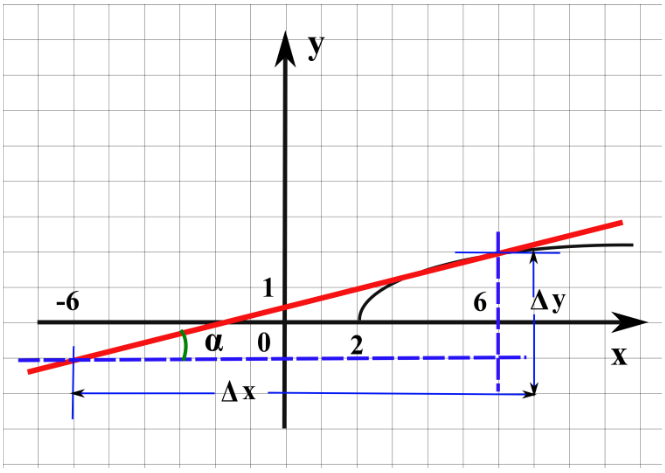


Рис.6

**Решение.** Согласно условию касательная проходит через точки $(-6; -1)$ и $(6; 2)$, рис. 6. Обозначим угол наклона этой касательной к положительному направлению оси абсцисс. В соответствии с геометрическим смыслом производной имеем

$$f'(6) = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

Ответ: 0,25.