Авторы:
Паршина Ольга Сергеевна
Паршина Анна Сергеевна
учащиеся 5 класса
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №24
с углубленным изучением отдельных предметов»
Белгородская область, г. Старый Оскол
Руководитель: Руис М. М.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА.
ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Изучая математику в начальной школе, мы познакомились с четырьмя основными арифметическими действиями: сложение, вычитание, умножение и деление. Для них существуют компоненты, они имеют свои свойства, с их помощью мы можем решать задачи. Одновременно с этим мы изучали как можно построить отрезок, луч, окружность и другие геометрические фигуры. При этом, построения линейкой, отыскание элементов фигур кажется немного другой частью математики, нежели решение примеров, уравнений, подсчет величин. Мы узнали от учителя, что эта область математики называется «Геометрия» и она очень велика. В связи с этим у нас появился вопрос: существуют ли в геометрии аналоги основных действий, как в арифметике; нужны ли для этого особые инструменты; какие задачи можно решить с помощью этих действий; насколько сложно выполнять все эти действия?

Конечно, предмет Геометрия имеет долгую историю, упоминания о нем исходят еще от древних египтян и, по нашему мнению, они также задавались подобными вопросами. Очевидно, что не каждый инструмент для чертежа может считаться самым простым, иначе говоря, элементарным, поэтому, можно сделать вывод, что геометры древности как раз и использовали простейшие чертежные инструменты: линейку и циркуль.

Таким образом, наше исследование поможет нам разобраться в том, какие способы и методы использовали геометры древности для решения своих задач, как пользоваться простейшими чертежными инструментами и настолько ли просты возможности их применения.

Гипотеза исследования звучит так: в геометрии также есть простейшие действия, как и в арифметике.

Объект исследования: геометрические построения.

Предмет исследования: построения с помощью циркуля и линейки.

Все вышесказанное помогает нам сформулировать **цель** нашего исследования: изучить задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

Для достижения цели потребуется решение следующих **задач**:

1. Анализ существующих источников по данной теме
2. Формальное определение задач на построение циркулем и линейкой
3. Выяснить суть задач на построение с помощью циркуля и линейки
4. Решить простейшие задачи на построения

История задач на построение циркулем и линейкой.

Традиционное ограничение орудий геометрических построений восходит к глубокой древности. В своей книге "Начала" Евклид (III век до н. э.) строго придерживается геометрических построений, выполняемых циркулем и линейкой, хотя названий инструментов он нигде не упоминает. Ограничения, по-видимому, были связаны с тем, что эти инструменты заменили собой веревку, первоначально служившую как для проведения прямых, так и для описания окружностей. Но многие историки математики объясняют произведенный Евклидом отбор материала тем, что он, следуя Платону и пифагорейцам, считал только прямую и круг "совершенными" линиями.

Искусство построения геометрических фигур было в высокой степени развито в Древней Греции. Древнегреческие математики еще 3000 лет назад проводили свои построения с помощью двух приборов: гладкой дощечки с ровным краем (это линейка) и двух заостренных палок, связанных на одном конце (это циркуль). Однако этих простейших инструментов оказалось достаточно для выполнения огромного множества различных построений. Древним грекам даже казалось, что любое разумное построение можно совершить этими инструментами, пока они не столкнулись с тремя знаменитыми впоследствии задачами.

Они издавна преобразовывали любую прямолинейную фигуру с помощью циркуля и линейки в произвольную прямолинейную фигуру, равновеликую ей. В частности, всякая прямолинейная фигура преобразовывалась в равновеликий ей квадрат. Поэтому понятно, что появилась мысль обобщить эту задачу: построить с помощью циркуля и линейки такой квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга. Это задача получила название квадратуры круга. Следы этой задачи можно усмотреть еще в древнегреческих и вавилонских памятниках второго тысячелетия до н.э. Однако ее непосредственная постановка встречается в греческих сочинениях V века до н.э.

Еще две задачи древности привлекали внимание выдающихся ученых на протяжении многих веков. Это задача об удвоении куба. Она состоит в построении циркулем и линейкой куба, имеющего объем вдвое больший, чем объем данного куба. Ее появление связывают с легендой, что на острове Делос в Эгейском море оракул, чтобы избавить жителей от эпидемии чумы, повелел удвоить алтарь, имевший форму куба. И третья задача трисекции угла о делении угла на три равные части с помощью циркуля и линейки.

Эти три задачи, так называемые 3 знаменитые классические задачи древности привлекали внимание выдающихся математиков на протяжении двух тысячелетий. И лишь в середине XIX века была доказана их неразрешимость, то есть невозможность указанных построений лишь с использованием только циркуля и линейки. В математике это были первые результаты о неразрешимости задач, когда средства решения указаны. Они были получены средствами не геометрии, а алгебры (с помощью перевода этих задач на язык уравнений), что еще раз подчеркнуло единство математики. Не поддаваясь решению, эти проблемы обогатили математику значительными результатами, привели к созданию новых направлений математической мысли.

Линейка — простейший измерительный геометрический инструмент, представляющий собой узкую пластину, у которой как минимум одна сторона прямая. Обычно линейка имеет нанесённые деления, кратные единице измерения длины (сантиметр, дюйм), которые используются для измерения расстояний.

Линейки обычно производят из пластика или дерева, реже из металлов.

В геометрии и картографии линейка используется только для проведения прямых линий, измерение расстояния по линейке считается грубым (для более точного измерения расстояние измеряют измерительным циркулем, раствор которого затем прикладывают к линейке).

Циркуль (от лат. circulus — круг, окружность) — инструмент для рисования окружностей и дуг окружностей, также может быть использован для измерения расстояний, в частности, на картах. Может быть использован в геометрии, черчении, для навигации и других целей.

Циркуль делается из металла и состоит из двух частей, соединённых шарниром. Обычно на конце одной из них располагается игла, на конце другой — пишущий предмет (например, грифель). У измерительного циркуля иглы на обеих ножках.

Специальный набор, содержащий помимо циркуля дополнительные принадлежности (такие как сменные стержни, иглы) и инструменты (кронциркуль, измерительный циркуль, рейсфедер), а также футляр с соответствующими углублениями для них называется готовальней.

Сейчас уже нельзя сказать, кто именно изобрел этот инструмент - история не сохранила для нас его имя, но легенды Древней Греции приписывают авторство Талосу, племяннику знаменитого Дедала, первого «воздухоплавателя» древности. История циркуля насчитывает уже несколько тысяч лет - судя по сохранившимся начерченным кругам, инструмент был знаком еще вавилонянам и ассирийцам (II - I века до нашей эры). На территории Франции, в галльском кургане был найден железный циркуль (I век нашей эры), во время раскопок в Помпеях было найдено много древнеримских бронзовых циркулей. Причем в Помпеях найдены инструменты уже совсем современные: циркули с загнутыми концами для измерения внутренних диаметров предметов, «кронциркули» для измерения максимального диаметра, пропорциональные - для кратного увеличения и уменьшения размеров. При раскопках в Новгороде был найден стальной циркуль-резец для нанесения орнамента из мелких правильных кружочков, очень распространенного в Древней Руси.

Со временем конструкция циркуля практически не изменилась, но ему придумали массу насадок, так что теперь он может вычерчивать окружности от 2 миллиметров до 60 сантиметров, кроме того, обычный графитный грифель можно заменить насадкой с рейсфедером для черчения тушью. Есть несколько основных типов циркулей: разметочный или делительный, его применяют для снятия и перенесения линейных размеров; чертежный или круговой, его применяют для вычерчивания окружностей диаметром до 300 миллиметров; чертежный кронциркуль для вычерчивания окружностей от 2 до 80 миллиметров в диаметре; чертежный штангенциркуль для вычерчивания окружностей диаметром больше 300 миллиметров; пропорциональный - для изменения масштабов снимаемого размера.

Формальное определение

В задачах на построение рассматриваются множество всех точек плоскости, множество всех прямых плоскости и множество всех окружностей плоскости, над которыми допускаются следующие операции:

Выделить точку из множества всех точек:

1. произвольную точку;
2. произвольную точку на заданной прямой;

3. произвольную точку на заданной окружности;
4. точку пересечения двух заданных прямых;
5. точки пересечения/касания заданной прямой и заданной окружности;
6. точки пересечения/касания двух заданных окружностей;

«С помощью линейки» выделить прямую из множества всех прямых:

1. произвольную прямую
2. произвольную прямую, проходящую через заданную точку
3. прямую, проходящую через две заданных точки.

«С помощью циркуля» выделить окружность из множества всех окружностей:

1. произвольную окружность
2. произвольную окружность с центром в заданной точке
3. произвольную окружность с радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками
4. окружность с центром в заданной точке и с радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками

В условиях задачи задается некоторое множество точек (фигура или ее часть). Требуется с помощью конечного количества операций из числа перечисленных выше допустимых операций построить другое множество точек (фигуру или ее часть, или особый элемент), находящееся в заданном соотношении с исходным множеством.

Решение задачи на построение содержит в себе три существенные части:

1. Описание способа построения заданного множества.

2. Доказательство того, что множество, построенное описанным способом, действительно находится в заданном соотношении с исходным множеством. Обычно доказательство построения производится как обычное доказательство теоремы, опирающееся на аксиомы и другие доказанные теоремы.

3. Анализ описанного способа построения на предмет его применимости к разным вариантам начальных условий, а также на предмет

единственности или не единственности решения, получаемого описанным способом.

Примеры задач на построение циркулем и линейкой

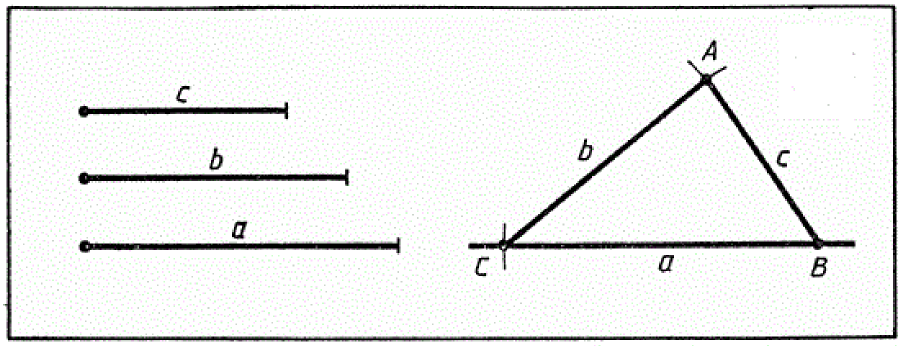
Во всех рассматриваемых здесь задачах можно пользоваться только двумя чертежными инструментами — линейкой и циркулем.

В школьном курсе геометрии при решении задач на построение прежде всего нужно знать, как выполнить построение, а уже потом его выполнять. Кроме этого, важно уметь доказать, что предложенное построение привело к построению фигуры с требуемыми свойствами.

Рассмотрим простейшие задачи на построение.

Задача 1. Построить треугольник с данными сторонами

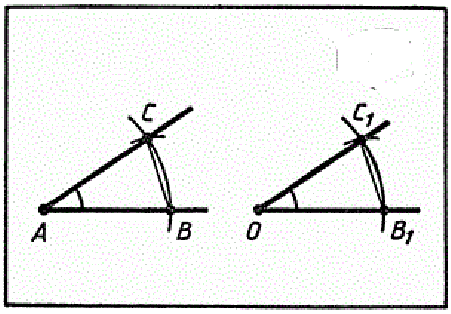
На рисунке построение выполнено так: с помощью линейки провели прямую и с помощью циркуля — три окружности: радиусами $BC = a$ и $BA = c$ с центром в точке B, радиусом $CA = b$ с центром в точке C.



Эта задача не всегда может иметь решение: каждая из сторон должна быть меньше суммы двух других сторон

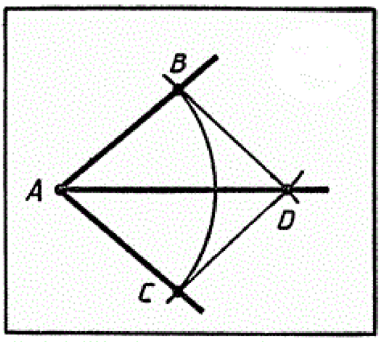
Задача 2. Построить угол, равный данному.

Построение следует выполнять следующим образом: $\angle A$ – данный угол, OB_1 – данный луч. Построим две окружности с центрами A и O одинакового радиуса и окружность с центром B_1 радиуса BC. Треугольники BAC и B_1OC_1 равны, так как у них равны все стороны, поэтому и $\angle A = \angle O$



Задача 3. Построить биссектрису данного угла.

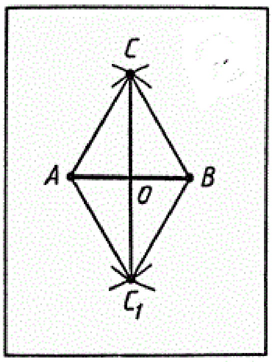
Построение биссектрисы AD данного угла BAC выполнено так: построили три окружности с центрами в точках A, B и C одного произвольного радиуса. Точку пересечения окружностей с центрами в точках B и C - точку D соединим с точкой A. луч AD — биссектриса угла BAC Доказательство этого факта основано на равенстве треугольников ABD и ACD по трем сторонам



Задача 4. Разделить отрезок пополам.

На рисунке построение середины отрезка AB выполнено так: строим две окружности с центрами в точках A и B радиусом AB Точки C и C_1, лежат в разных частях плоскости, поэтому отрезок CC_1 пересекает AB в точке O — середине отрезка AB

Доказательство основано на рассмотрении равных треугольников: CAC_1 и CBC_1, а также ACO и BCO



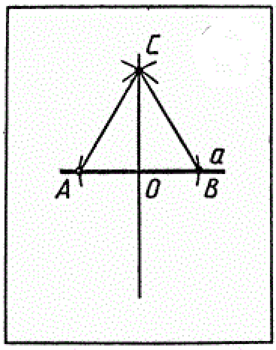
Задача 5. Через данную точку О провести прямую, перпендикулярную данной прямой а.

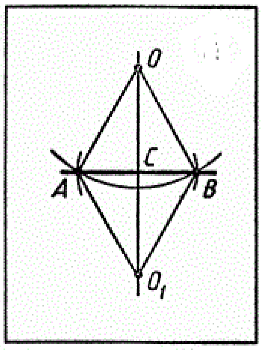
Возможны два случая:

1) Точка О принадлежит прямой а. Построение изображено на рисунке. Строим три окружности: с центром в точке О произвольного радиуса (она пересекает прямую а в точках А и В), с центрами в точках А и В радиусом АВ Точку пересечения двух последних окружностей — точку С соединим с точкой О. Прямая ОС искомая.

Перпендикулярность прямых следует из равенства треугольников АСО и ВСО.

2) Точка О не принадлежит прямой а. Построение, изображенное на рисунке , выполнено так: построили три окружности: с центром в точке О произвольного радиуса, А и В — точки пересечения этой окружности с прямой а; с центрами в точках А и В тем же радиусом, O_1 — точка их пересечения, лежащая в части плоскости, в которой не лежит точка О. Прямая OO_1 — искомый перпендикуляр.





Заключение.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки существуют с древних времён. Ученые древности также как и мы сейчас решали и создавали задачи, развивая геометрию.

Оказывается, что не все инструменты для чертежа можно считать идеальными, напротив, всего два: линейка (односторонняя) и циркуль, можно считать таковыми. С помощью таких инструментов можно выполнять простейшие построения: точка, отрезок, прямая, окружность. Такие построения позволяют производить простейшие действия:

1. Построение отрезка, равного данному;
2. Построение угла, равного данному;
3. Построение биссектрисы данного угла;
4. Построение перпендикуляра через данную точку лежащую или не лежащую на данной прямой.

Это небольшое количество действий дает возможность решать удивительно сложные задачи, однако, также существуют задачи, которые невозможно решить с помощью циркуля и линейки и это доказано.

Таким образом, можно считать гипотезу доказанной: среди всех построений с помощью циркуля и линейки существуют простейшие, которые можно считать базовыми как арифметические действия.

В ходе исследования мы изучили некоторые задачи на построение, и они оказались очень интересными, хоть и сложными.

Проведенная работа позволит нам легче изучить геометрию и может быть продолжена с целью изучения более сложных задач, когда мы получим больше знаний из курса геометрии.

Список источников.

1. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение. — Издание восемнадцатое. — М.: Учпедгиз, 1950. — 176 с.
2. *Воронец А. М.* Геометрия циркуля. — М.-Л.: ОНТИ, 1934. — 40 с. — (Популярная библиотека по математике под общей редакцией Л. А. Люстерника).
3. *Гейлер В. А.* Неразрешимые задачи на построение // СОЖ. — 1999. — № 12. — С. 115—118.
4. *Кириченко В. А.* Построения циркулем и линейкой и теория Галуа // Летняя школа «Современная математика». — Дубна, 2005.
5. *Манин Ю. И.* Книга IV. Геометрия // Энциклопедия элементарной математики. — М.: Физматгиз, 1963. — 568 с.
6. *Прасолов В. В.* Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. — М.: Наука, 1992. — 80 с. — (Популярные лекции по математике).
7. Геометрические построения // Справочник по математике (для ср. уч. заведений)/ Цыпкин А.Г., под ред. Степанова С.А. — 3-е изд. — М.: Наука, Гл. редакция физ.-мат. литературы, 1983. — С. 200–213. — 480 с.