Жувикина Ирина Алексеевна
учитель математики, физики и астрономии доктор физико-математических наук
Государственное бюджетное образовательное учреждение
средняя школа №352 Красносельского района г. Санкт-Петербурга
г. Санкт-Петербург
Маховер Михаил Сергеевич
учитель математики, заслуженный учитель Российской Федерации
Государственное бюджетное образовательное учреждение
«Гимназия №11» Василеостровского района г. Санкт-Петербурга
г. Санкт-Петербург

УРОК ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ. ЗАДАНИЕ №11 ПРОФИЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Как показывает многолетний опыт подготовки к сдаче профильного ЕГЭ по математике, у учащихся часто возникают трудности при решении некоторых заданий, не требующих развернутого решения. На наш взгляд, это связано с тем, что ряд тем элементарной математики, изученных в основной средней школе, не повторяется и не углубляется в 10-11 классах. В данной разработке урока подготовке к ЕГЭ предлагается методика обучения решению ряда типовых примеров задания №11 ЕГЭ по математике профильного уровня.

Задача 1. [1]

Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 19 рабочих, во второй – 27 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Решение. Составим математическую модель описанного в данной задаче процесса. Обозначим через v производительность одного рабочего, через n_1 – количество рабочих в первой бригаде и n_2 – количество рабочих во второй бригаде, t – число дней, прошедших от момента перехода рабочих из второй бригады в первую до момента выполнения заказа. Выразим через введенные величины объем работы, выполненной первой бригадой:

$$vn_1 \cdot 9 + v(n_1 + 7)t.$$

Структура этого выражения такова: первое слагаемое представляет собой работу, выполненную первой бригады за первые 9 дней, второе слагаемое – работ, выполненная после перехода 7 рабочих из второй бригады. Ясно, что в сумме эти два слагаемые дают полный объем работы, выполненной первой бригадой. Аналогично, для объема работ, выполненной второй бригадой, можно записать

$$vn_2 \cdot 9 + v(n_2 - 7)t.$$

По условию задачи, Объемы работ, выполненных бригадами, одинаковы. Поэтому приравняем эти два выражения

$$vn_1 \cdot 9 + v(n_1 + 7)t = vn_2 \cdot 9 + v(n_2 - 7)t.$$

Видим, что величина v – является отличным от нуля одинаковым множителем в правой и левой частях равенства, поэтому обе части уравнения можно поделить на эту величину. Тогда с учетом числовых данных задачи $n_1 = 19$ и $n_2 = 27$, получим

$$19 \cdot 9 + 26t = 27 \cdot 9 + 20t.$$

Из этого уравнения находим $t = 12$. То есть после того, как семеро рабочих перешли из второй бригады в первую, было отработано еще 12 дней. Прибавляя к полученным 12 дням те 9 дней, которые бригады отработали до перехода, получаем окончательно 21 день.

Ответ: 21.

Задача 2. [2]

На изготовление 810 деталей первый рабочий тратит на 3 часа больше, чем второй на изготовление 900 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали меньше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Решение. Составим математическую модель условия задачи. Для этого введем величину v - количество деталей, которое делает в час первый рабочий. Тогда $v+4$ - количество деталей, которое делает в час второй рабочий. Время, которое затратил первый рабочий на изготовление 810 деталей составляет $\frac{810}{v}$ часов, соответственно на изготовление 900 деталей у второго рабочего ушло $\frac{900}{v+4}$ часов. По условию, первая величина на 3 больше, чем вторая. Запишем это условие в виде $\frac{810}{v} - 3 = \frac{900}{v+4}$. Поделив обе части этого неравенства на общий множитель 3 и перенеся все слагаемые в левую часть, получим следующее уравнение

$$\frac{270}{v} - \frac{300}{v+4} - 1 = 0.$$

Приведением к общему знаменателю в левой части это уравнение приводится к квадратному. Вспоминаем, что дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Тогда для числителя получим

$$v^2 + 34v - 1080 = 0.$$

Это квадратное уравнение легче решать с применением сокращенного детерминанта $D/4$. Получим два корня $v_1 = 20\ v_2 = -54$. По смыслу задачи выбираем из них первый.

Ответ: 20.

Задача 3. [1]

Автомобилист выехал с постоянной скоростью 86 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 344 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 300 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Это пример задачи, при решении которой участник экзамена тратит время на составление уравнений, не замечая, что она легко решается с помощью элементарных методов начальной школы.

Решение. Такую задачу проще решать «по-действиям».

Первое действие. Найдем, сколько времени был в пути автомобилист. Для этого поделим пройденное им расстояние 344 км на его скорость 86 км/ч. Получим $t_1 = 4$ часа.

Второе действие. Определим, сколько времени t_2 ехал мотоциклист. Из 4 часов вычтем 40 минут, которые составляют $\frac{2}{3}$ часа. Очень часто встречающаяся ошибка – участник экзамена забывает, что все однородные величины должны быть выражены в одних и тех же единицах. Поэтому, раз по условию задачи требуется дать ответ в км/ч, то 40 минут следует перевести в доли часа. Итак, $t_2 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ (час).

Третье действие. Найдем скорость мотоциклиста. Для этого пройденное им расстояние 300 км поделим на затраченное время t_2. Получим $\frac{300 \cdot 3}{10} = 90$ (км/ч).

Ответ: 90.

Задача 4. [1]

Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго – 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобиль будет опережать второго ровно на 1 круг?

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим искомое время через t. Тогда за это время первый автомобиль пройдет $92t$ км, а второй -

$77t$ км. Разность этих расстояний согласно условию задачи, составляет один круг или 30 км. Отсюда получим уравнение $15t = 30$ и находим $t = 2$ (час). Переведем 2 часа в минуты и получим окончательный результат.

Ответ: 120.

Задача 5. [1]

Если смешать 45-процентный раствор кислоты и 97-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Такие задачи, как правило, вызывают существенные трудности у учащихся. Вернее сказать, они «отпугивают» обилием кажущихся разрозненными числовых данных. Целью учителя здесь должно быть обучение системной работе с таким объемом данных и сведению их в единую картину, выражением которой выступает уравнение или система уравнений.

Решение. Здесь поможет составление математической модели процесса изготовления растворов. Обозначим через m_1 массу 45-процентного раствора, а через m_2 массу 97-процентного раствора. Полная масса кислоты (без воды), которая содержится в этих растворах, составляет $0{,}45m_1 + 0{,}97m_2$. После сливания растворов и добавления 10 кг чистой воды масса раствора стала равной $m_1 + m_2 + 10$, а масса содержащейся в нем чистой кислоты не изменилась. Условие того, что раствор стал 62-процентным, выражается равенством

$0{,}45m_1 + 0{,}97m_2 = 0{,}62(m_1 + m_2 + 10)$. (1)

Рассмотрим второе сливание. В результате добавления в смесь 10 кг 50-процентного раствора общая масса содержащейся в нем чистой кислоты увеличилась на ($0{,}5 \cdot 10 = 5$) кг и стала равной $0{,}45m_1 + 0{,}97m_2 + 5$, а полная масса получившегося раствора стала такой же, как после первого слияния

$m_1 + m_2 + 10$. Запишем условие того, что новый раствор имеет концентрацию 72%

$0{,}45m_1 + 0{,}97m_2 + 5 = 0{,}72(m_1 + m_2 + 10)$. (2)

Уравнения (1) и (2) представляют систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными m_1 и m_2. Искомой величиной по условию задачи является значение m_1. Ясно, что из этих уравнений следует исключить величину m_2. Для этого вычтем из уравнения (2) уравнение (1)

$5 = 0{,}1(m_1 + m_2 + 10)$. (3)

Из уравнения (3) m_2 легко выражается через m_1. Имеем

$m_2 = 40 - m_1$.

Подставив найденное выражение в (1), получим уравнение для определения величины m_1

$45m_1 + 97 \cdot 40 - 97m_1 = 62 \cdot 50$.

Отсюда находим $m_1 = 15$ кг.

Ответ: 15.

Задача 6. [2]

Цена телевизора в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшается цена телевизора, если он выставлен на продажу за 103680 рублей, а через 2 года был продан за 58 320 рублей?

В таких задачах трудности, как правило, вызывает необходимость работы с многоразрядными числами, а признаки делимости уже подзабыты. В этой задаче следует вспомнить, что число делится на 10, если оно оканчивается нулем. А также здесь понадобятся признаки делимости на 8 и на 9: число делится на восемь, если на 8 делится число, образуемое тремя последними цифрами данного числа, число делится на 9, если на 9 делится сумма его цифр. Кроме того, чем больше ученик помнит значений квадратов двузначных чисел, тем более уверенно он чувствует себя при решении подобных задач.

Решение. Пусть начальная цена телевизора равна A и каждый год она падает на долю p от своей величины. Это означает, что через год телевизор будет стоить $A(1-p)$. Через два года цена телевизора уменьшится по сравнению с $A(1-p)$ еще раз на ту же долю p. Таким образом, через два года телевизор будет стоить $A(1-p)^2$. Подставив числовые данные задачи, получим уравнение для определения величины p

$103680\ (1-p)^2 = 58\ 320.$

Для облегчения счета заметим, что числа в левой и правой частях делятся на 80. Действительно, оба эти числа оканчиваются нулем, а числа 368 и 832 делятся на 8. Поделив обе части уравнения на 80, получим

$1296\ (1-p)^2 = 729.$

Если помнить, что $1296 = 36^2$, а $729 = 27^2$, то легко вычисляется $p = 0{,}25 = 25\%$. Если квадраты двузначных чисел не приходят сразу на память, то можно заметить, что 1296 и 729, согласно признаку делимости, делятся на 9. Сократив обе части уравнения на 9, приходим к тому же результату.

Ответ: 25.

Задача 7. [1]

Первый и второй насосы наполняют бассейн за 15 минут, второй и третий – за 21 минуту, а первый и третий – за 35 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Решение. В такой задаче так же полезно начинать решение с составления математической модели. Пусть полный объем бассейна A, v_1, v_2 и v_3 - производительности первого, второго и третьего насосов, соответственно. Понятно, что, если одновременно работают два или три насоса, то их производительности складываются. Поэтому время, которое требуется двум насосам, чтобы наполнить весь бассейн будет равно объему бассейна A, деленному на их суммарную производительность. В соответствии с данными условия задачи, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{A}{v_1+v_2} = 15 \\ \frac{A}{v_2+v_3} = 21 \\ \frac{A}{v_1+v_3} = 35 \end{cases}.$$

Получилась система трех уравнений с четырьмя неизвестными. На первый взгляд кажется, что решить эту систему уравнений невозможно. Однако, прочитав внимательно условие задачи, можно заключить, что находить значения всех четырех неизвестных вовсе не требуется, а требуется только найти значение выражения $\frac{A}{v_1+v_2+v_3}$ - времени наполнения бассейна при одновременной работе всех трех насосов. Дальше можно пойти на некоторую хитрость. Она заключается в том, что мы перейдем от дробно-рациональных уравнений к линейным. Для этого перейдем в системе уравнений к равенствам обратных величин

$$\begin{cases} \frac{v_1}{A} + \frac{v_2}{A} = \frac{1}{15} \\ \frac{v_2}{A} + \frac{v_3}{A} = \frac{1}{21} \\ \frac{v_1}{A} + \frac{v_3}{A} = \frac{1}{35} \end{cases}.$$

Заметим, что каждая дробь в этой системе уравнений повторяется дважды, поэтому, если мы почленно сложим эти три уравнения, то получим

$$2\left(\frac{v_1}{A} + \frac{v_2}{A} + \frac{v_3}{A}\right) = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{35}.$$

Отсюда легко находим величину, обратную искомой $\frac{v_1+v_2+v_3}{A} = \frac{1}{14}$ (мин^{-1}). Окончательно, получаем

Ответ: 14.

Список литературы

1. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий и др.; под ред. И.В. Ященко.- М.: Издательство «Экзамен», 2019.-263 [1] с.

2. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2019. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2019 года: учебно-методическое пособие, под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова.- Ростов-на-Дону: Легион, 2018.-432с. – (ЕГЭ)